On a Local Regularity Result for a Minimizer of a Functional with Exponential Growth

内藤, 久資

数理解析研究所講究録
第 770 巻 1991 年 140-147

On a Local Regularity Result for a Minimizer of a Functional with Exponential Growth

名古屋大学・理学部 内藤 久資 (Hisashi NAITO)

1. Introduction.

ここでは $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内の有界領域 Ω 上で定義された $\mathbb{R}^m$-valued function に対して, 汎関数

$$E(u) = \int_\Omega e^{|\nabla u|^2}\, dx$$

を考える.

このような問題を考える動機は以下のようなものである. より一般に, compact Riemann 多様体 (M, g), (N, h) の間の写像 $u\colon M \longrightarrow N$ に対して, 汎関数

$$\mathbb{E}_p(u) = \int_M |\nabla u|^p\, dx$$

を考える. この問題に関して, Hardt-Lin **[3]** は (適当な class で) minimizer の存在と, その partial regularity を証明している. 汎関数 $\mathbb{E}_p$ の minimizer は $[p] + 1 > \dim M$ のとき M 上で smooth であり, $[p] + 1 \leq \dim M$ のときは, $(\dim M - [p] - 1)$-次元 Hausdorff measure が有界な集合を除いたところで smooth であることがわかる. 特に, $p = 2$ のときは汎関数 $\mathbb{E}_p$ はよく知られた harmonic map の汎関数であり, その regularity に関しては, $\dim M = 2$ のとき, Sacks-Uhlenbeck **[5]** によって, $\dim M \geq 3$ のときは Schoen-Uhlenbeck **[6]** によって調べられている. したがって, はじめに述べたようなより速い growth を持つ汎関数では, 定義域上全体での regularity を期待することができる.

また汎関数 E を S^1 から Riemann 多様体への写像に対して考えてみると, その critical point は constant speed の測地線であることがわかる. すなわち, 汎関数 $\mathbb{E}_2$ を考えたときと同じ geometric object が critical point として現れていることに注意しよう.

この問題に関して, 最近次のような結果が得られている.

Theorem 1.1 (Ėells-Lemaire **[1]**). $\mathbb{R}^n$ 内の *strictly* に *convex* な領域上の *real-valued function* に対する汎関数 E は, 与えられた *smooth* な境界値 φ_0 に対して, *smooth* な *E-minimizer* φ *with* $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$ が存在する.

この解説での主結果は, 上の結果を (local) に vector-valued に拡張する. ここでは考える関数空間は Orlicz space ではなく, より自然な空間 $W = \bigcap_{1<p<\infty} W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ で考える. 以下, 関数空間 B,

W_g を

$$B := \bigcap_{1<p<\infty} W^{1-1/p,p}(\partial\Omega, \mathbb{R}^m),$$

$$W_g := \left\{ u \in \bigcap_{1<p<\infty} W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) : u|_{\partial\Omega} = g \right\}, \quad \text{for} \quad g \in B$$

と定義する．このとき，定理は次のように述べられる．

Theorem 1.2 [4]. 任意の $g \in B$ に対して，W_g のなかに *unique* な *minimizer* u が存在して，$B_r(a) \subset \Omega$ ならば，u は $B_r(a)$ 上 *Hölder continuous* である．

先に述べた汎関数 $\mathbb{E}_p$ が $p > 2$ のときに，degenerate elliptic な変分問題，すなわち，その Euler-Laglange 方程式が degenerate elliptic となる問題であったのに対して，この問題は，strongly elliptic ではあるが，uniformly elliptic にはなっていない．このことが，この問題の困難さである．

最後に，この問題は Warwick 大学の J. Eells 教授に suggest されたものであることを記しておく．

2. Existence of minimizers.

はじめに，汎関数 E の minimizer の存在について簡単に述べておく．与えられた境界値 $g \in B$ に対して，Hilbert space $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ の convex subspace X_g を

$$X_g := \left\{ u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m) : u|_{\partial\Omega} = g \right\}$$

と定義する．このとき，汎関数 E は X_g 上 strongly convex, coersive かつ weakly lower semi-continuous であることから，unique な E-minimizer を X_g のなかに持つことがわかる．更に簡単な考察により，X_g での E-minimizer は W_g に属し，それは W_g における E-minimizer であることがわかる．したがって，次の定理を得ることができる．

Theorem 2.1. 任意の $g \in B$ に対して，W_g のなかに *unique* な *E-minimizer* が存在する．

3. Regularity of minimizers.

この問題の困難さは Introduction にも述べた通り，uniformly elliptic でないことである．そのために，少々複雑な手順で Moser の iteration を使う．始めに，monotonicity formula を示しておこう．

Lemma 3.1. 汎関数 E の *minimizer* u に対して，$B_R(a) \subset \Omega$ であれば，関数

$$r^{-n} \int_{B_r(a)} e^{|\nabla u|^2} \, dx$$

は $[0, R]$ で *non-decreasing* である．

Proof. ここでは, Hardt-Lin [3] にしたがって, $0 < r < s < R$, $0 < t < \dfrac{r+s}{r}$ に対して, 摂動 θ_t を

$$\theta_t(x) := \begin{cases} tx & \text{for} \quad 0 < |x| < r \\ \dfrac{1}{s-t}\{(1-t)|x| + (ts-r)\}x & \text{for} \quad r \le |x| < s \\ x & \text{for} \quad s \ge |x| \end{cases}$$

と定義する. このとき, $u \circ \theta_t^{-1} \in W$ かつ $B_s(a)$ の外側では $u \circ \theta_t^{-1} = u$ であるから,

$$\frac{d}{dt} \int_{B_s} e^{|\nabla(u\circ\theta_t^{-1})|^2}\, dx \bigg|_{t=1} = 0$$

が成り立つ. これより, 簡単な計算によって

$$n \int_{B_r} e^{|\nabla u|^2}\, dx - r\frac{d}{dr}\int_{B_r} e^{|\nabla u|^2}\, dx + 2r\int_{\partial B_r} e^{|\nabla u|^2} |\nabla_\tau u|^2\, dS \ge 0$$

を得る. ここで, ∇_τ は ball $B_r(a)$ の半径方向に関する微分である. これを r に関して積分することにより,

$$\frac{d}{dr}\left[r^{-n}\int_{B_r} e^{|\nabla u|^2}\, dx\right] \ge 2r^{-n}\int_{\partial B_r} e^{|\nabla u|^2}|\nabla_\tau u|^2\, dS \ge 0$$

が成り立つ. ∎

以下では monotonicty formula を使って, Moser の方法によって regularity を示す outline を紹介する. その時に, よく知られたように $n = 2$ の場合と $n \ge 3$ の場合では証明が微妙に異なるので, ここでは $n \ge 3$ の場合のみ記すことにする. もちろん, $n = 2$ の場合も同様にして証明できる.

Lemma 3.2. 領域 Ω は $\mathbb{R}^n$, $(n \ge 3)$ の有界領域であるとする. 汎関数 E の W_g における *minimizer* u に対して, $B_r(a) \subset \Omega$ ならば, r によらない定数 C と, ある $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n)$ が存在して, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ であれば,

$$\left(r^{-n}\int_{B_{r/2}(a)} e^{(1+\varepsilon)|\nabla u|^2}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \le C\left(r^{-n}\int_{B_r(a)} e^{|\nabla u|^2}\, dx\right)^{\frac{(1+\varepsilon)(n-2)+1}{2n}}$$

が成り立つ. 特に

$$r^{-n}\int_{B_{r/2}} e^{(1+\varepsilon)|\nabla u|^2}\, dx$$

は有界.

Proof. いま E-minimizer u は汎関数 E の Euler-Lagrange 方程式を weak な意味でみたすことがわかる:

$$\int_\Omega \nabla_i u^\alpha \nabla_i v^\alpha e^{|\nabla u|^2}\, dx = 0, \quad \text{for all} \quad v \in C_0^\infty(\Omega).$$

ここで, test function v を $\nabla_k v$ に置き換え, $v^\alpha := \nabla_k u^\alpha w^{\gamma/2}\eta^2$, $w = e^{|\nabla u|^2}$ とおき, $\gamma < 0$ を $\gamma > \max\{-1, -4/n\}$ として計算すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_r} (\nabla_k \nabla_i u + \nabla_i u \nabla_k |\nabla u|^2) \nabla_i \nabla_k u w^{\gamma/2+1} \eta^2 \, dx \\ &+ \frac{\gamma}{2} \int_{B_r} (\nabla_k \nabla_i u + \nabla_i u \nabla_k |\nabla u|^2) \nabla_k u \nabla_i |\nabla u|^2 w^{\gamma/2+1} \eta^2 \, dx \\ &+ 2 \int_{B_r} (\nabla_k \nabla_i u + \nabla_i u \nabla_k |\nabla u|^2) \nabla_k u w^{\gamma/2+1} \nabla_i \eta \eta \, dx \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $\nabla_i u \nabla_i |\nabla u|^2 = -\Delta u$ を使えば,

$$(\text{第 1 項}) + (\text{第 2 項}) = \int_{B_r} (|\nabla^2 u|^2 + \frac{\gamma}{2} |\Delta u|^2) w^{\gamma/2+1} \eta^2 \, dx + \frac{1}{2}(1 + \frac{\gamma}{2}) \int_{B_r} |\nabla |\nabla u|^2|^2 w^{\gamma/2+1} \eta^2 \, dx$$

を得るが, $0 > \gamma > \max\{-1, -4/n\}$ を使って, 下から

$$(\text{第 1 項}) + (\text{第 2 項}) \geq \frac{1}{2}(1 + \frac{\gamma}{2}) \int_{B_r} |\nabla |\nabla u|^2|^2 w^{\gamma/2+1} \eta^2 \, dx$$

で評価できる.

一方, 第 3 項は

$$|(\text{第 3 項})| \leq C \int_{B_r} (1 + |\nabla u|^2) |\nabla |\nabla u|^2| |\nabla \eta| \eta w^{\gamma/2+1} \, dx$$

と評価できるが, $x \geq 0$, $\delta > 0$ に対して, $xe^x \leq \dfrac{1}{\delta} e^{1+\delta} x$ であることを使って,

$$\frac{C}{\delta} \int_{B_r} |\nabla |\nabla u|^2| |\nabla \eta|^2 \eta w^{\gamma/2+1+\delta} \, dx$$

と評価できる.

したがって,

$$\int_{B_r} |\nabla |\nabla u|^2|^2 w^{\gamma/2+1} \eta^2 \, dx \leq \frac{C}{\delta} \int_{B_r} |\nabla |\nabla u|^2| \eta \cdot |\nabla \eta| w^{\gamma/2+1+\delta} \, dx$$

が成り立つ. ここで, 相加相乗の不等式, Hölder の不等式を使って, $\dfrac{\gamma}{2} + 1 + 2\delta = 1$ となる $\delta > 0$ をとれば, ある定数 $C = C(n)$ が存在して,

$$\int_{B_r} |\nabla w^{(\gamma/2+1)/2}|^2 \eta^2 \, dx \leq C \int_{B_r} w^{\gamma/4+1} |\nabla \eta|^2 \, dx$$

が成り立つ. Sobolev のうめこみ定理を使えば,

$$\left(r^{-n}\int_{B_{r/2}} w^{(\gamma/2+1)\frac{n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \le Cr^{-n}\int_{B_r} w^{\gamma/4+1}\,dx$$

が成り立つ. したがって, $\varepsilon_0+1=(\gamma/2+1)\dfrac{n}{n-2}$ とおけば, もう一度, Hölder の不等式を使って,

$$\left(r^{-n}\int_{B_{r/2}} e^{(\varepsilon_0+1)|\nabla u|^2}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \le C\left(r^{-n}\int_{B_r} e^{|\nabla u|^2}\,dx\right)^{\frac{(1+\varepsilon)(n-2)+1}{2n}}$$

を得る.

更に Lemma 3.1 を使えば,

$$r^{-n}\int_{B_r} e^{|\nabla u|^2}\,dx$$

は $d=\mathrm{dist}(\partial\Omega,a)$, n, $E_0=\displaystyle\int_\Omega e^{|\nabla u|^2}\,dx$ だけによる定数によって bound される. ∎

Lemma 3.3. *Lemma 3.2* と同じ仮定のもと, 任意の $\gamma>1$, $\varepsilon>0$ に対して, r によらない定数 C が存在して,

$$\left(r^{-n}\int_{B_r}\left(e^{\gamma|\nabla u|}\eta\right)^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \le Cr^{-n}\int_{B_r} e^{(\gamma+\varepsilon)|\nabla u|^2}\,dx$$

が成り立つ. ここで, η は B_r に *support* を持つ *cutoff function* である.

証明は, Lemma 3.2 と同様にすればよい.

Lemmas 3.2, 3.3 だけでは iteration argument を行なうことはできない. これらによってわかったことは, 任意の有限な $q>1$ に対して,

$$r^{-n}\int_{B_{r/2}} e^{q|\nabla u|^2}\,dx < C$$

がわかっただけである.

さらに次を示すことができる.

Lemma 3.4. *Lemma 3.2* と同じ仮定のもとで, r によらない定数 C が存在して, 任意の $\alpha>2$ に対して,

$$\left(r^{-n}\int_{B_{r/2}}\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\alpha\frac{n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \le C\left(r^{-n}\int_{B_r}\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\alpha p}\,dx\right)^{1/p}$$

が成り立つ．ここで，p は $1 < p < \dfrac{n}{n-2}$ をみたす．

Proof. Lemma 3.2 と同様にして，$w = 1 + |\nabla u|^2$ に対して，

$$\left(r^{-n}\int_{B_{r/2}} w^{\gamma\frac{n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \le Cr^{-n}\int_{B_r} w^{\gamma}e^{|\nabla u|^2}\,dx$$

を示すことができる．ここで，右辺に Hölder の不等式を使うと，

$$\left(r^{-n}\int_{B_{r/2}} w^{\gamma\frac{n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \le C\left(r^{-n}\int_{B_r} w^{p\gamma}\,dx\right)^{1/p}\left(r^{-n}\int_{B_r} e^{q|\nabla u|^2}\,dx\right)^{1/q}$$

を得る．ここで，Lemma 3.2, Lemma 3.3 の結論を使えば，求める結果を得る． ∎

このLemma を使えば，iteration argument を実行することができる．

Lemma 3.4. *Lemma 3.2 と同じ仮定のもとに，$B_{4r}(a) \subset \Omega$ ならば，r によらない定数 C が存在して*

$$\sup_{B_r(a)} |\nabla u|^2 \le C$$

が成り立つ．

この gradient の bound を利用して，∇u が Hölder 連続であることを示そう．そのためには，次の Lemma が本質的である．

Lemma 3.5. *いま，$B_{R_0}(a) \subset \Omega$, $0 < r < R_0/4$ と仮定する．このとき，constant vector $V \in \mathbb{R}^{nm}$ で，*

$$|V| \le \sup_{B_{R_0}} |\nabla u|$$

をみたすものに対して，r によらない定数 C と，ある constant vector $V_\sigma \in \mathbb{R}^{nm}$ $(0 < \sigma < 1/2)$ が存在して，

$$|V_\sigma| \le \sup_{B_{R_0}} |\nabla u|,$$

$$\int_{B_{\sigma r}} |\nabla u - V_\sigma|^2\,dx \le C\sigma^{n+2}\int_{B_r} |\nabla u - V|^2\,dx + C\sigma^n\int_{B_r} |\nabla u - V|^2\,dx$$

を満たす．

Proof. これは実際に V_σ を決めればよい．$v\colon B_r \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を，B_r 上 $v = u$ となる $\Delta v = 0$ の H^1-solution とし，V_σ を，その $B_{\sigma r}$ 上での平均値とすればよい． ∎

Lemma 3.6. $B_{R_0}(a) \subset \Omega$ ならば, 汎関数 E の minimizer u は $0 < r < R_0$ に対して, r によらない定数 C が存在して,

$$\int_{B_r(a)} |\nabla u - U_r|^2\, dx \le C r^{n+2\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

をみたす.

Proof. Lemma 3.5 によって, $\sigma > 0$ をうまく選んで, 以下が成り立つようにできる.

$$r_i := \sigma^i \cdot r, \quad B_i := B_{r_i}$$

とおいたとき, constant vectors $W_0,\ W_1,\ \cdots W_k$ に対して $W_i \le \sup_{B_{R_0}} |\nabla u|$ ならば,

$$W_0 := U_r$$
$$|W_{i+1}| \le \sup_{B_{R_0}} |\nabla u|$$
$$r_{i+1}^{-n} \int_{B_{i+1}} |\nabla u - W_{i+1}|^2\, dx \le C\sigma^2 r_i^{-n} \int_{B_i} |\nabla u - W_i|^2\, dx + C$$

が成り立つ. この操作を繰り返せば, constant vectors $\{W_i\}_{i\ge 0}$ が存在して, 上の主張が満たされることがわかる. したがって, 平均値 U_r は, 積分 $\int_{B_r} |\nabla u - c|^2\, dx$ を minimize することから, ある $C_0 < 1$ が存在して, 任意の $0 < \rho < r < R_0/4$ に対して,

$$r^{-n} \int_{B_\rho} |\nabla u - U_\rho|^2\, dx \le C_0 r^{-n} \int_{B_r} |\nabla u - U_r|^2\, dx + C_1$$

を満たすことがわかる. このことから Lemma の主張が従う. ∎

References.

[1] J. Eells and L. Lemaire, Private communication.

[2] M. Giaquinta, "Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Analysis," Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1983.

[3] R. Hardt and F. H. Lin, *Mappings minimizing the L^p-norm of the gradient*, Commun. Pure and Appl. Math. **40** (1987), 555-588.

[4] H. Naito, *On a local Hölder continuity for a minimizer of a certain functional*, preprint.

[5] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. of Math. **113** (1981), 1–24.

[6] R. Schoen and K. Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps*, J. Differential Geometry **18** (1982), 307–335.